

**Ж.А. Захарова<sup>1</sup>, А.И. Ладынин<sup>2</sup>, Е.С. Митяков<sup>2</sup>**

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГОСУДАРСТВА И БИЗНЕСА В ФОРМЕ КОНЦЕССИЙ**

<sup>1</sup> Нижегородский государственный технический университет  
им. Р.Е. Алексеева

*Нижний Новгород, Россия*

<sup>2</sup> МИРЭА – Российский технологический университет  
*Москва, Россия*

Государственно-частное партнерство является важным фактором устойчивого развития и экономической безопасности территорий. Одним из его вариантов выступает согласование интересов государственного и частного капитала в наиболее адекватной требованиям экономики ее формы – концессии в видах экономической деятельности, востребованных обществом и учитывающей особенности развития регионов с ограниченным потенциалом саморазвития. Используя совокупность рыночных и нерыночных механизмов, концессия позволяет преодолеть ключевые противоречия партнеров, гармонизирует взаимодействие государства и бизнеса, что, в свою очередь, обеспечивает динамику экономического развития регионов. При этом построение такого партнерства предусматривает детальный анализ условий контракта и нередко предполагает наличие внутренних противоречий контрагентов (государства, как представителя интересов населения и частного капитала). Рекомендовавший себя подход к оценке перспективности концессии заключается в построении имитационных моделей, позволяющих проанализировать интересы обеих сторон. Приведен один из вариантов математического моделирования государственно-частного партнерства, основанный на построении контрактной кривой, исходя из условия Парето-эффективности в предположении наличия двух агентов на рынке – государства и бизнеса.

**Ключевые слова:** договор концессии; устойчивое развитие региона; ящик Эджворта; контрактная кривая.

**Введение.** Математическое моделирование государственно-частного партнерства (ГЧП) получило широкое распространение среди научных исследований. Так, в работе [1] разработана модель финансового взаимодействия государства и малого бизнеса, основанная на использовании системы нелинейных дифференциальных уравнений, позволяющих соблюсти условие стабильности развития системы в целом и обеспечить наиболее эффективное ее развитие. Параметрический анализ такой системы дает возможность получить ее различные фазовые портреты, анализ которых позволяет делать выводы о характере изменений переменных модели без знания аналитических решений исходной системы уравнений.

В статье [2] приведены алгоритм принятия решений и экономико-математические модели сотрудничества бизнеса и государственного сектора на уровне субъектов Российской Федерации. При этом моделирование совместного принятия решений в рамках взаимовыгодного сотрудничества базируется на математическом аппарате векторной оптимизации.

Автор работы [3] предложил решение задачи оптимизации выбора наиболее значимых инфраструктурных проектов на базе ГЧП с целью организации их эффективного финансирования из бюджетов различных иерархических уровней (регионального, федерального и др.) в условиях их ограниченности. Выбор проектов производится, исходя из их актуальности для социально-экономического развития региона.

В статье [4] приводится математическая модель ГЧП в сфере регионального жилищного строительства, в основу которой положен механизм согласования стейкхолдеров при реализации проектов. В результате представители органов власти получают в собственность объекты коммунальной инфраструктуры и жилые помещения для социальных нужд, бизнес-структуры имеют гарантированную прибыль, а народонаселение – жилье по доступным ценам. Для реализации модели используется теоретико-игровой алгоритм.

Автор статьи [5] рассмотрел различные формы взаимодействия властных и предпринимательских структур, которые основаны на применении различных экономико-математических подходов: теории принятия решений, статистических и эконометрических методах, методе максимального правдоподобия, математическом аппарате теории игр и моделирования иерархических систем. Одним из перспективных методов, по мнению автора, является многокритериальный анализ решений для координации государственно-частных интересов в управлении проектами устойчивого развития на основе метода анализа иерархии Т. Саати.

В статье [6] предложена математическая модель оценки совместимости индивидуумов в процессе их взаимоотношений. При этом оценка качеств индивидуумов осуществляется, исходя из анализа степени близости вектора их характеристик, который находится согласно экспертным данным. Модель подразумевает расчет оптимальных соотношений выигрышей индивидуумов по матрице предпочтений с целью идентификации степени согласования их интересов.

В работе [7] приводится модель концессии производства общественного блага, в которой концессионер покрывает затраты на производство, получает премию и платит штраф за каждую единицу удовлетворенной и неудовлетворенной потребности соответственно. Предложена теоретико-игровая модель, в которой концессионер определяет производственную мощность, а государственный сектор назначает премии и штрафы. Показано, что единственное равновесие по Штакельбергу обеспечивает компенсацию затрат концессионера и заданный уровень удовлетворения потребности.

Целью данной статьи выступает разработка экономико-математической модели ГЧП, базирующейся на использовании инструментария теории общего равновесия – ящика Эджворта с построением контрактной кривой, исходя из условия Парето-эффективности, в предположении наличия двух агентов на рынке – государства и бизнеса (двухсторонняя монополия).

**Экономико-математическая модель взаимодействия государства и бизнеса в форме концессий.** Ящик (коробка) Эджворта – модель, состоящая из диаграмм полезностей двух экономических субъектов, позволяющая определить условия достижения оптимального распределения экономических благ, при потреблении которых достигается максимально возможный уровень полезности для участников обмена. В экономических науках ящик Эджворта задействуется для графического представления рынка с двумя товарами и двумя потребителями. Размеры ящика представляют собой общие количества двух товаров. Впервые данная модель была описана в 1881 г. английским философом и экономистом Ф. Эджвортом, получив дальнейшее развитие в работах А. Броули и В. Парето.

Предположим, что в экономике имеется два участника, которые могут обмениваться двумя благами (двусторонняя монополия). Для исследования модели двусторонней монополии можно задействовать карту кривых безразличия. Пусть один монополист в модели выступает продавцом товаров (ресурсов), а второй является их покупателем (владельцем денег). Отложим на оси ординат сумму денежных средств, предназначенных для покупки товаров, а на оси абсцисс – их количество. В такой постановке кривые безразличия и кривые постоянной прибыльности будут тождественны. По аналогии можно построить множество кривых безразличия для продавца товаров. Далее можно наложить кривые безразличия покупателя и продавца зеркально друг к другу на одном графике так, чтобы система координат продавца начиналась в правом верхнем углу, а покупателя – в левом нижнем (рис. 1). В результате мы получаем ящик Эджворта.



Рис. 1. Ящик Эджворта

Каждый участник модели двусторонней монополии стремится к переходу на кривую безразличия более высшего порядка: продавец намерен двигаться влево и вниз, а покупатель – вправо и вверх. На рис. 1 точка T1 представляет наиболее благоприятную ситуацию для продавца блага, но при этом минимально приемлемую для его покупателя; в точке T2 положение продавца будет лучше в сравнении с точкой T1, а покупателя хуже; в точке T4 возникнет ситуация, максимально приемлемая для покупателя и минимально благоприятная для продавца товаров. Областью допустимых решений модели выступает заштрихованная область на рис. 1, однако оптимальные решения будут расположены на кривой сделок (или контрактной кривой) TT\*, соединяющей точки T1-T4, которые являются точками касания кривых безразличия покупателя и продавца.

Для решения проблем социально-экономического развития регионов необходим приток квалифицированных кадров и молодежи, в настоящий момент времени весьма актуальной становится задача строительства доходных домов. Одним из основных организационно-экономических механизмов их строительства являются концессии. В рамках этой модели государство предоставляет бизнесу на льготных условиях в аренду земельный участок, осуществляет подготовку территории. Бизнес за счет собственных ресурсов или на основе софинансирования осуществляет строительство жилья, сдает его в наем и эксплуатирует в течение срока заключения концессионного соглашения.

Рассмотрим проблему выбора оптимального контракта в рамках концессионных соглашений контрагентов с применением теоретико-игровой модели. Для этого сформулируем задачу следующим образом: существует проблема выбора оптимальных условий контракта для двух игроков: государства и частного бизнеса, заинтересованного в соответствующих государственных программах. С точки зрения формальной модели, каждая из сторон обладает собственной кривой полезности, и решение предполагается при учете интересов обеих сторон. Формализуем модель с использованием аппарата теории игр и построим ящик Эджворта.

Поскольку инвестиционные программы разные, соответственно, и кривые полезности имеют разный угол наклона касательной. Для простейшей модели можно взять функцию вида  $U$ :

$$U(x, y) = \alpha xy,$$

где  $x$  – государственные (земельный участок),  $y$  – инвестиции со стороны бизнеса,  $0 \leq \alpha \leq 1$  – привлекательность предлагаемых государством активов. В базовом варианте заложен несколько кривых безразличия, где  $\alpha$  меняется от 0,2 до 1 с шагом 0,2 (5 сценариев, табл. 1). При этом, соответственно,  $\alpha = 1$  – идеальный случай, который полностью устраивает концес-

сионера, а  $\alpha = 0,2$  – наихудший сценарий. Данный коэффициент можно связать со сроком окупаемости, валидностью застройки жилья, прочими предпочтениями концессионера.

Таблица 1.

Возможные сценарии контракта

Значение коэффициента $\alpha$	Описание привлекательности инвестиций
0,2	Совершенно непривлекательные инвестиции
0,4	Слабо привлекательные инвестиции
0,6	Привлекательные инвестиции
0,8	Очень привлекательные инвестиции
1,0	Исключительно доходные инвестиции

На рис. 2 (а, б) приведены кривые безразличия участников для различных значений коэффициента  $\alpha$ . По осям представлены инвестиции и объем государственных контрактов, представляющих интерес для концессионера соответственно.

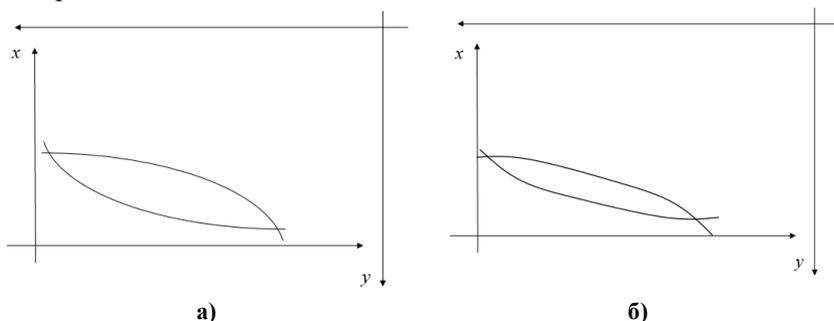


Рис. 2. Кривые безразличия при больших (а) и малых (б) значениях коэффициента  $\alpha$

Выгодный обоим участникам обмен состоится вдоль кривой, на которой и расположены множество эффективных решений – линии Парето (рис. 3). Теперь перейдем к задаче анализа модели концессионного соглашения в сфере ГЧП. Формализуем задачу о нахождении уравнения переговорного множества, вдоль которого и будет найдено решение задачи (рис. 4).

Исходя из условия Парето-эффективности, один из игроков максимизирует свою полезность, а второй ее сохраняет, т.е. она равна некоторому постоянному значению, либо наоборот. Какая именно из двух задач решается, зависит от внешних факторов, но, в силу свойств контрагентов в конкретной задаче о формировании концессии, логично предположить, что игроком, максимизирующим свою полезность  $U_1(x, y) \rightarrow \max$ , является государство, тогда концессионер остается при значениях  $U_2(a - x, b - y) = C_1$ .

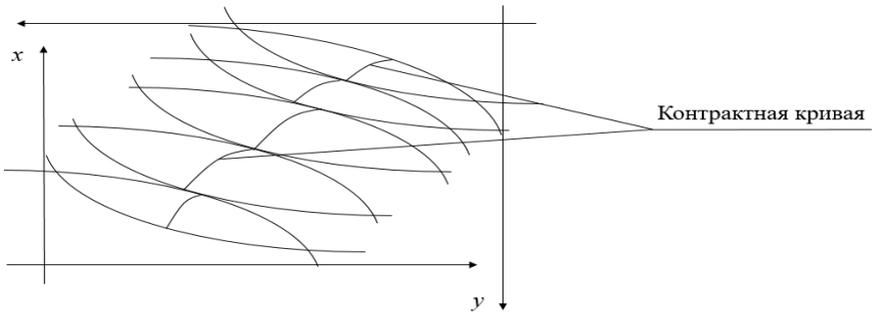


Рис. 3. Линия Парето

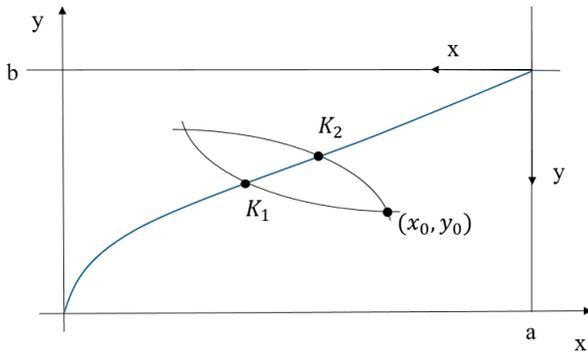


Рис. 4. Кривые безразличия и контрактная кривая

При этом некоторые начальные значения определяются как:

$$\begin{aligned} C_1 &= U_2(a - x_0, b - y_0); \\ C_2 &= U_1(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем задачу поиска условного экстремума для функции полезности первого игрока – государства.

$$\begin{cases} U_1(x, y) \rightarrow \max; \\ U_2(a - x, b - y) = C_1; \\ C_1 = u_2. \end{cases}$$

Запишем функцию Лагранжа:

$$U = U_1(x, y) - \lambda(U_2(a - x, b - y) - C).$$

Для нахождения условного экстремума найдем производные и приравняем их нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial x} - \lambda \frac{\partial U_2}{\partial(a - x)} = 0; \\ \frac{\partial U_2}{\partial y} + \lambda \frac{\partial U_2}{\partial(b - y)} = 0. \end{cases}$$

Исключая  $\lambda$ , получим:

$$\frac{\frac{\partial U_1}{\partial x}}{\frac{\partial U_1}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial U_2}{\partial(a-x)}}{\frac{\partial U_2}{\partial(b-y)}}.$$

Предельные полезности продуктов обмена для игрока 1 имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_2}{\partial x} &= MU_{1x}, \\ \frac{\partial U_1}{\partial y} &= MU_{1y}.\end{aligned}$$

Предельная норма замещения продукта  $x$  продуктом  $y$  примет вид:

$$\begin{aligned}MRS_1 &= \frac{MU_{1x}}{MU_{1y}}; \\ \frac{\partial U_2}{\partial(a-x)} &= MU_{2x}; \\ \frac{\partial U_2}{\partial(b-y)} &= MU_{2y}; \\ \frac{MU_{2x}}{MU_{2y}} &= MRS_2\end{aligned}$$

и, следовательно,  $MRS_1(x, y) = MRS_2(a - x; b - y)$ . При учете условий индивидуальной рациональности, точки, находящиеся на контрактной кривой, удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{cases} MRS_1(x, y) = MRS_2(a - x; b - y). \\ U_1(x, y) \geq U_1(x_0, y_0); \\ U_2(a - x; b - y) \geq U_2(a - x_0; b - y_0). \end{cases}$$

Таким образом, оптимальное в смысле Парето решение предполагает взаимодействие концессионера и государства в представленных выше диапазонах обмена благ соответственно.

**Выводы.** В работе предложена одна из возможных экономико-математических моделей взаимодействия государства и бизнеса в форме концессий. Центральное место при решении этой задачи занимает модель, известная как «ящик Эджворта». Данный подход допускает вариативность в отношении формы уравнений кривых полезности, описывающих предпочтения контрагентов. Поиск решения позволяет уточнить параметры с учетом специфики решаемой задачи: предполагается различная полезность в зависимости от специфики инвестиционной программы. На основе авторской модели реализован обобщенный метод решения задачи нахождения уравнения переговорного множества, вдоль которого и осуществляется решение искомой задачи, усматривающее максимально возможный уровень полезности для обоих участников концессии. Предложенный подход в основе своей предполагает решение исходной задачи с применением инструментария

дифференциального исчисления и выступает одним из возможных методов прогнозирования действий контрагентов, способствуя принятию научно обоснованных управленческих решений в условиях неполных данных.

© Захарова Ж.А., Ладынин А.И., Митяков Е.С., 2023

### Библиографический список

- [1] Грешнов, М.В. Модель финансового взаимодействия государства и малого бизнеса / М.В. Грешнов // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 6.
- [2] Козлов, В.Л. Математические модели и алгоритмы поддержки формирования взаимовыгодного сотрудничества государства и бизнеса на региональном уровне / Ю.В. Бондаренко, В.Л. Козлов // Вестник ВГУ, Серия: системный анализ и информационные технологии. 2015. №4. С. 92-100.
- [3] Макаров, И.Н. Экономико-математическая модель оптимизации выбора и финансирования инфраструктурных проектов на базе государственно-частного партнерства / И.Н. Макаров // Российское предпринимательство. 2016. Т. 17. № 20. С. 2643-2654.
- [4] Бузулуцкий, М.И. Экономико-математическое моделирование государственно-частного партнерства в сфере регионального жилищного строительства / М.И. Бузулуцкий // Инновации и инвестиции. 2019. №7. С. 243-250.
- [5] Исаков, А.К. Модели и формы взаимодействия государства и бизнеса в современной экономике / А.К. Исаков // Сборники конференций НИЦ Социосфера. 2020. № 27. С. 46-60.
- [6] Ганичева, А.В. Математическая модель взаимоотношений индивидуумов / А.В. Ганичева, А.В. Ганичев // Научное обозрение. 2018. № 3. [Электронный ресурс]. – <https://srjournal.ru/2018/id129>.
- [7] Хуторецкий, А.Б. Модель концессии на производство общественного блага / А.Б. Хуторецкий, Е.В. Гайлит // Вестник НГУ. Серия: Социально-экономические науки. 2013. Т. 13. Вып. 2. С. 5-13.

**Zh. A. Zakharova<sup>1</sup>, A.I. Ladynin<sup>2</sup>, E.S. Mityakov<sup>2</sup>**

## STATE AND BUSINESS INTERACTION CONCESSION AGREEMENT MATHEMATICAL MODEL

<sup>1</sup> Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev  
*Nizhny Novgorod, Russia*

<sup>2</sup> MIREA - Russian Technological University  
*Moscow, Russia*

**Abstract.** Public-private partnership is an important factor in sustainable development and economic security of territories. One of the options for such a partnership is harmonization of the interests of public and private capital in the form most adequate to the requirements of the economy of its form – concessions in the types of economic activities demanded by society and taking into account the peculiarities of the development of regions with a limited potential for self-development. Using a combination of market and non-market mechanisms, the concession makes it possible to overcome the key

contradictions of partners, harmonizes the interaction between the state and business, which, in turn, ensures the dynamics of the economic development of the regions. At the same time, building such a partnership involves a detailed analysis of the terms of the contract and often involves the presence of internal contradictions between counterparties (the state, as a representative of the interests of the population and private capital). A proven approach to assessing the prospects of a concession is to build simulation models that allow you to analyze the interests of both parties. The article presents one of the options for mathematical modeling of public-private partnership, based on the construction of a contract curve, based on the Pareto efficiency condition, assuming the presence of two agents in the market - the state and business.

**Keywords:** concession, mathematical model of public-private partnership, sustainable development, Edgeworth box, contract curve.

### References

- [1] Greshnov, M.V. (2013). [Model of financial interaction between the state and small business]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya* [Modern problems of science and education]. [Electronic resource] Available at: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=11373>
- [2] Kozlov, V.L., Bondarenko Yu.V. (2015). [Mathematical models and algorithms for supporting the formation of mutually beneficial cooperation between the state and business at the regional level]. *Vestnik VGU, Seriya: sistemyj analiz i informacionnye tehnologii* [Bulletin of VSU, Series: system analysis and information technologies]. No. 4. pp. 92-100. (In Russ).
- [3] Makarov, I.N. (2016). [Economic-mathematical model for optimizing the choice and financing of infrastructure projects on the basis of public-private partnership]. *Rossijskoe predprinimatel'stvo* [Russian Journal of Entrepreneurship]. No. 20. pp. 2643-2654. (In Russ).
- [4] Buzulutsky, M.I. (2019). [Economic and mathematical modeling of public-private partnership in the field of regional housing construction]. *Innovacii i investicii* [Innovations and investments]. No. 7. pp. 243-250. (In Russ).
- [5] Isakov, A. K. (2020). [Models and forms of interaction between the state and business in the modern economy]. *Sborniki konferencij NIC Sociosfera* [Collection of conferences of the National Research Center Sociosphere]. No. 27. pp. 46-60. (In Russ).
- [6] Ganicheva, A.V., Ganichev, A.V. (2018). [Mathematical model of relationships between individuals]. *Nauchnoe obozrenie: jelektron. zhurn* [Scientific review: electron. magazine]. No. 3. (In Russ).
- [7] Khutoretsky, A.B., Gailit, E.V. (2013). [The model of concession for public goods production]. *Vestnik NGU. Seriya: Social'no-jekonomicheskie nauki* [Bulletin of NSU. Series: Social and economic sciences]. Vol. 13. Issue. 2. pp. 5-13. (In Russ).