УДК 332.1 *DOI 10.46960/74159_2020_2_77*

Е.С. Митяков, С.И. Глазов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОРОНАВИРУСА В РОССИИ

Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. Алексеева, г. Н. Новгород

В статье приведено математическое моделирование распространения коронавируса в России. В качестве инструментария в работе были выбраны различные математические модели, позволяющие понять эволюцию заболевания, оценить текущую ситуацию и прогнозировать развитие пандемии на краткосрочные или долгосрочные периоды времени. В работе осуществлен обзор существующих методов математического моделирования эпидемий, построены собственные альтернативные модели и выяснено, какая из построенных моделей лучше отражает характеристики распространения заболевания. В качестве базовых моделей в работе выбраны логистическая модель и модель Гомпертца. На примере реальных данных показано, что модель Гомпертца дает существенно более точный прогноз как на краткосрочные периоды, так и на длительные, особенно в местах, где распространение эпидемии протекает продолжительно. Обе модели хорошо справляются с описанием уже имеющихся данных, однако в условиях длительного мониторинга, на экспоненциальном этапе, логистическая модель Ферхюльста отклоняется в большую сторону от реальных значений.

Ключевые слова: математическое моделирование, коронавирус, логистическая модель, модель Гомпертца, прогнозирование

Введение

Быстрая вспышка COVID-19 и его широкое распространение по всему миру превратили локальную болезнь, первоначально находившуюся в Китае, в глобальную проблему; таким образом, она приобрела статус пандемии. Поэтому исследование динамики и прогнозирование распространения названного вирусного заболевания является весьма актуальной задачей. В качестве инструментария в работе были выбраны различные математические модели, позволяющие понять эволюцию заболевания. Целью статьи выступает выявление динамики развития и прогнозирование распространения вирусного заболевания COVID-19.

Краткий обзор литературы

В научной литературе в широко представлены различные математические модели в эпидемиологии [1-8]. Исследование динамики передачи любого заболевания зависит от характера данных и разработки модели, которая наилучшим образом описывает сценарий вспышки. Подгонка эпидемиологических данных помогает оптимизировать параметры модели, особенно те, которые невозможно определить экспериментальным путем. Например, бессимптомные параметры (возможна ли передача вируса в бессимптомный период, сколько и как долго длятся бессимптомный период и т.д.) для гриппа у людей не могут быть оценены экспериментально или при помощи наблюдений. Однако они могут быть оценены с помощью модельных исследований при условии, что известно общее количество бессимптомных индивидуумов (по результатам серологического обследования) для конкретной вспышки [9]. Моделирование и имитационные исследования, основанные на эпидемиологических данных, также могут помочь оценить эффективность мер контроля и могут быть использованы для оценки эффективности вакцины.

Математическое моделирование может оказать реальную помощь в описании, понимании и, в конечном итоге, прогнозировании распространения вируса на определенной территории (например, город, область, регион, страна и континент). Обычно математические модели содержат набор уравнений, которые включают ряд адаптивных параметров, которые могут быть определены численно на основе имеющихся реальных данных [10]. Модели с адаптивными параметрами при верификации показали наилучшее соответствие модельных и реальных данных и описывают динамику явления с наименьшим количеством адаптивных параметров. Чтобы сохранить простой подход в моделировании, избежать чрезмерной параметризации и сохранить числовую устойчивость и стабильность, необходимо задействовать два или три адаптивных параметра в зависимости от вида модели [11]. Такой подход позволяет реализовать эти модели без необходимости использования специальных инструментов программирования.

В качестве базовых моделей в работе выбраны нескольких: логистическая модель и модель Гомпертца. Логистическая модель [12] была первоначально предложена в 1838 году Пьером Франсуа Ферхюльстом для описания роста популяций, где скорость размножения зависит как от существующего населения, так и от количества доступных ресурсов. Модель Гомпертца [13] похожа на логистическую и была разработана Бенджамином Гомпертцем в 1825 году для описания закона человеческой смертности. Так же, данные модели могут быть адаптированы для моделирования смертности населения от болезни.

Математическое описание логистической модели и модели Гомпертца представлено уравнениями (1) и (2) соответственно:

$$y = \frac{a}{1+be^{-ct}} \tag{1}$$

$$y = ae^{-be^{-ct}} \tag{2}$$

где t – время, a, b, c – адаптивные параметры, y – зависимая переменная, которая прогнозируется моделью (в данном случае, число зараженных). Подход к параметризации моделей является минимальным и соответствует принципу «keep-it-simple». Что касается независимой переменной, то t можно считать либо непрерывным, либо дискретным, поскольку оно соответствует количеству дней с начала пандемии в конкретном регионе.

Модели, представленные выше, могут быть использованы для моделирования в большинстве стран. Необходимо определить значения адаптивных параметров с помощью процедуры идентификации, которая основана на регрессии реальных данных.

Результаты моделирования

Далее приведем верификацию на примере данных по России и Нижегородской области. На рис. 1 представлен экспоненциальный рост в начале эпидемии в России (первые 15 дней эпидемии). Как видно на графике, кривая роста числа заболевших практически полностью соответствует росту по экспоненте. Это подтверждает высокий R-квадрат. Далее на рис. 2 приведен график заболеваемости в России (последние данные 12 июня). Прогноз сделан 5 мая. В условии недостатка данных, логистическая модель Ферхюльста даёт некорректный прогноз, но достаточно хорошо справляется модель Гомпертца, которая несколько завышает прогнозируемые показатели.

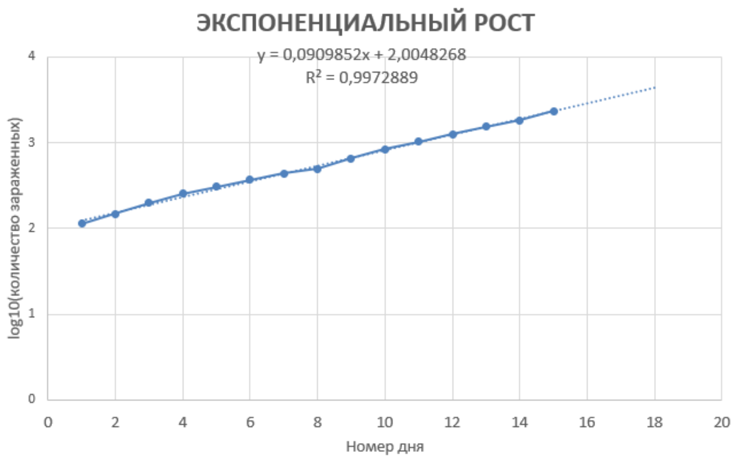

Рис. 1. Экспоненциальный рост в начале эпидемии в России (первые 15 дней эпидемии)

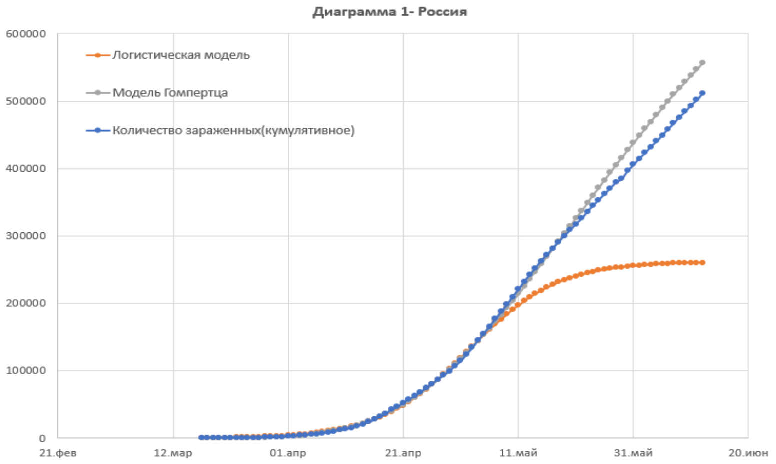

Рис. 2. График заболеваемости в России. Прогноз 5 мая

Значения заболевших в начале эпидемии в Нижегородской области также, как и в России в целом, хорошо соответствуют интерполяции (рис. 3-6). На рис. 3 представлен экспоненциальный рост в начале эпидемии в Нижегородской области (первые 15 дней эпидемии). На рис. 4 приведен график заболеваемости в Нижегородской области. Прогноз сделан 5 мая.

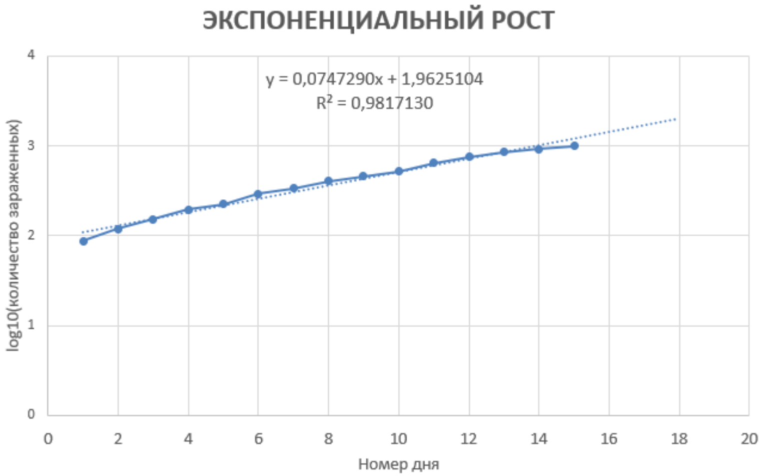

Рис. 3. Экспоненциальный рост в начале эпидемии в Нижегородской области (первые 15 дней эпидемии)

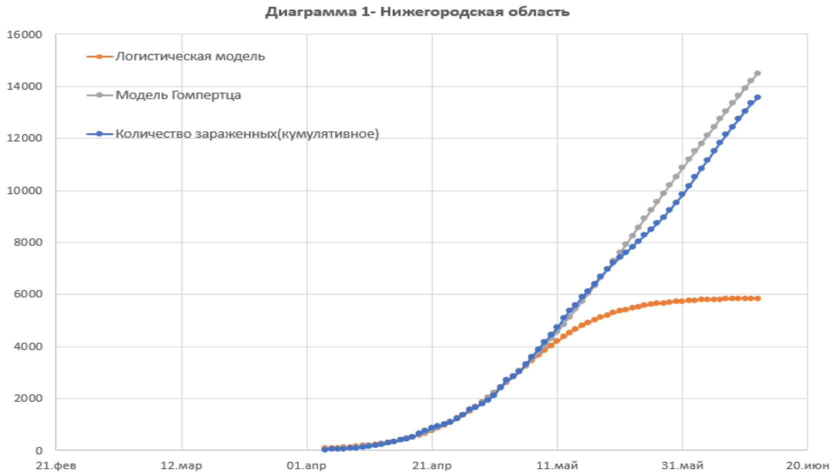

Рис. 4. График заболеваемости в Нижегородской области. Прогноз 5 мая

В условиях недостатка данных, модель Гомпертца чуть завышает показатели, а модель Ферхюльста дает нереалистичный прогноз. Переместим точку прогноза на 20 мая (рис 5), а затем на 12 июня (рис. 6).

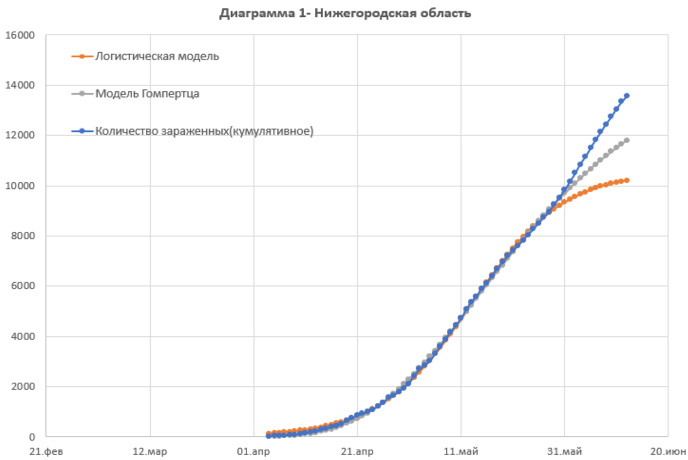

Рис. 5. График заболеваемости в Нижегородской области. Прогноз 20 мая

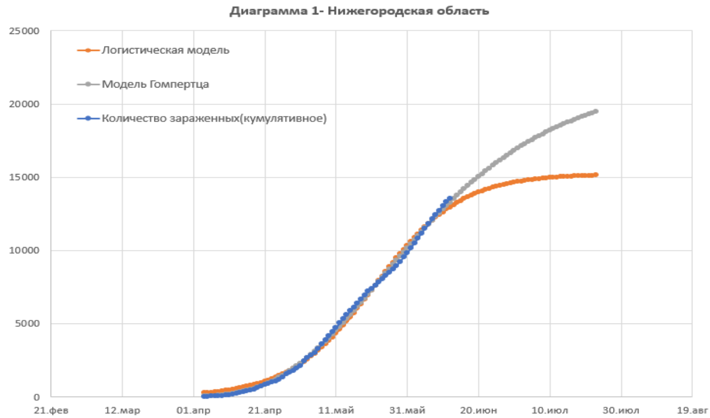

Рис. 6. График заболеваемости в Нижегородской области. Прогноз 12 июня

Анализируя рисунки, можно сделать вывод о том, что в Нижегородской области ситуация похожа ситуацию в целом по стране. Модель Гомпертца также даёт существенно более точные результаты. Это связано с тем, что модель Гомпертца не симметрична, в связи с этим затухание эпидемии происходит не так быстро, как начало.

Можно заметить, модель Гомпертца дает существенно более точный прогноз как на краткосрочные периоды, так и на длительные, особенно в местах, где распространение эпидемии протекает продолжительно. Обе модели хорошо справляются с описанием уже имеющихся данных, но в условиях длительного мониторинга, на экспоненциальном этапе, логистическая модель Ферхюльста отклоняется в большую сторону от реальных значений. Легко заметить, что это прогнозы, основанные на математической модели, которая зависит от наличия надежных данных. Чем больше реальных данных, тем лучше. Действительно, каждый день в национальных и региональных отчетах публикуются новые данные, и можно делать более надежные прогнозы. Кроме того, модель прогнозов основана на предположении, что будущие значения будут зарегистрированы и предоставлены в соответствии с теми же условиями с точки зрения мер социального дистанцирования и условий сбора данных.

Заключение

В представленной работе даны и проанализированы несколько регрессионных моделей для прогнозирования двух наиболее важных переменных в пандемии с точки зрения принятия решений и планирования действий в чрезвычайных ситуациях. Эти модели могут быть применены к различным регионам и странам, поскольку феномен пандемии имеет одинаковые качественные характеристики. Адаптивные параметры позволяют количественно описать динамику заболеваемости разных регионов и стран. Действительно, каждый регион и каждая страна характеризуются различными особенностями, связанными с их климатом, распределением населения (с точки зрения возраста, плотности, образа жизни, взаимодействия людей, семейных привычек) и политическими решениями по противодействию пандемии. Математика, лежащая в основе предлагаемых моделей, довольно проста и может быть легко реализована. Основываясь на реальных данных, которые ежедневно публикуются в открытых источниках для большинства регионов, эти модели можно настроить с точки зрения их адаптивных параметров и использовать для прогнозирования тенденций в заболеваемости на краткосрочных периодах. Долгосрочное прогнозирование более проблематично, поскольку, с одной стороны, вирус имеет свойство мутации, а с другой, – внутренние условия могут меняться из-за человеческого фактора (изменение режимов самоизоляции, проведение массовых мероприятий и т.д.).

Две основные модели, предложенные в этой работе (логистическая и Гомпертца), могут использоваться для качественных и количественных целей в чрезвычайной ситуации COVID-19. Они отслеживают реальные данные и позволяют дифференцировать модели, чтобы найти наиболее надежную из них, а также позволяют понять, начинаются ли неожиданные тенденции. Эти модели могут быть использованы для прогнозирования развития явления на краткосрочных горизонтах. В первые трудные дни наиболее важны прогнозы на короткие промежутки времени, чтобы оценить время, с которым растет количество зараженных, подготовить и выделить необходимые ресурсы и справиться с последующей волной пациентов в больницах.

Библиографический список

[1] Allen L. et al. A mathematical analysis and simulation of a localized measles epidemic //Applied Mathematics and Computation. – 1990. – Т. 39. – №. 1. – P. 61-77.

[2] Anderson RM, May RM. Infectious disease of humans: Dynamics and control / Anderson RM, May RM.- Oxford University Press, Oxford-New York, 1991.- 768p.

[3] Bernoulli D. Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir //Histoire de l'Acad., Roy. Sci.(Paris) avec Mem. – 1760. – P. 1-45.

[4] Brauer F. Mathematical epidemiology is not an oxymoron // BMC Public Health. – 2009. – Т. 9. – №. 1. – P. 1-11.

[5] Deguen S., Thomas G., Chau N. P. Estimation of the contact rate in a seasonal SEIR model: application to chickenpox incidence in France //Statistics in medicine. – 2000. – T. 19. – №. 9. – P. 1207-1216.
[6] Gupte M. D. et al. Modelling epidemiology of leprosy //Indian journal of leprosy. – 2000. – T. 72. – №. 3. – P. 305-316.
[7] Meima A. et al. SIMLEP: a simulation model for leprosy transmission and control //International Journal of Leprosy and Other Mycobacterial Diseases. – 1999. – T. 67. – P. 215-236.
[8] Rvachev L. A. Modelling experiment of a large-scale epidemic by means of a computer //Doklady Akademii Nauk. – Russian Academy of Sciences, 1968. – T. 180. – №. 2. – P. 294-296.
[9] Shil P. et al. Transmission dynamics of novel influenza A/H1N1 2009 outbreak in a residential school in India //Current Science. – 2011. – T. 100. – №. 8. – P. 1177-1183.
[10] Panovska-Griffiths J. Can mathematical modelling solve the current Covid-19 crisis? //BMC Public Health. - 2020.
[11] Manca D. Dynamics of ICU patients and deaths in Italy and Lombardy due to Covid-19// European Society of Anaesthesiology. - 2020.
[12] Hosmer Jr D. W., Lemeshow S., Sturdivant R. X. Applied logistic regression. – John Wiley & Sons, 2013. – T. 398.
[13] Panik M. J. Growth curve modeling: theory and applications. – John Wiley & Sons, 2014.

E.S. Mityakov, S.I. Glazov

MATHEMATICAL MODELING OF SPREADING OF THE CORONAVIRUS IN RUSSIA

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, N. Novgorod

Abstract. The article presents mathematical modeling of spreading of the coronavirus in Russia. As a toolkit in the work various mathematical models are selected that make it possible to understand evolution of the disease, assess the current situation and predict development of the pandemic for short or long-term periods of time. The paper reviews the existing methods of mathematical modeling of epidemics, builds its own alternative models and clarifies which of the constructed models better reflect characteristics of spreading of the disease. Several basic models are selected in the work: the logistic model and the Gompertz model. On the example of real data it is shown that the Gompertz model gives a significantly more accurate forecast for both short-term periods and long-term ones especially in places where spread of the epidemic lasts for a long time. Both models do a good job of describing the already available data, however, under conditions of long-term monitoring at the exponential stage the Verhulst logistic model deviates more from the real values.

Keywords: mathematical modeling, coronavirus, logistics model, Gompertz model, forecasting.

References

[1] Allen, L. (1990). [A mathematical analysis and simulation of a localized measles epidemic]. *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 39. pp. 61-77.

[2] Anderson, RM, May, RM. (1991). [Infectious disease of humans: Dynamics and control]. *Oxford University Press, Oxford-New York*. 768 p.

[3] Bernoulli, D. (1760). [Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir]. *Histoire de l'Acad., Roy. Sci.(Paris) avec Mem*. pp. 1-45.

[4] Brauer, F. (2009). [Mathematical epidemiology is not an oxymoron]. *BMC Public Health.* V. 9. pp. 1-11.

[5] Deguen, S., Thomas, G., Chau, N.P. (2000). [Estimation of the contact rate in a seasonal SEIR model: application to chickenpox incidence in France. V. 19. pp. 1207-1216.

[6] Gupte, M.D. (2000). [Modelling epidemiology of leprosy]. *Indian journal of leprosy*. V. 72. pp. 305-316.

[7] Meima, A. (1999). [SIMLEP: a simulation model for leprosy transmission and control]. *International Journal of Leprosy and Other Mycobacterial Diseases*. V. 67. pp. 215-236.

[8] Rvachev, L.A. (1968). [Modelling experiment of a large-scale epidemic by means of a computer]. *Russian Academy of Sciences*. V. 180. pp. 294-296. (In Russ.).

[9] Shil, P. (2011). [Transmission dynamics of novel influenza A/H1N1 2009 outbreak in a residential school in India]. *Current Science*. V. 100. pp. 1177-1183.

[10] Panovska-Griffiths, J. (2020). [Can mathematical modelling solve the current Covid-19 crisis?]. *BMC Public Health*.

[11] Manca, D. (2020). [Dynamics of ICU patients and deaths in Italy and Lombardy due to Covid-19// European Society of Anaesthesiology].

[12] Hosmer. Jr D. W., Lemeshow, S., Sturdivant, R.X. (2013). [Applied logistic regression]. *John Wiley & Sons*. V. 398.

[13] Panik, M.J. (2014). [Growth curve modeling: theory and applications]. *John Wiley & Sons*.